ÉPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE
MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Rappels et notations

On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\},$$

et pour tout réel positif p, on notera $\ell_p(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites réelles $X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$S_p(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p < +\infty.$$

Si $X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $Y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $\ell_2(\mathbb{N})$, on rappelle que

$$(1) \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|\,|y_k| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2 < +\infty,$$

on posera alors

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k y_k \quad \text{et} \quad \|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X\rangle}.$$

Pour tout ensemble fini A, on notera $\mathrm{Card}(A)$ son cardinal.

I. a) Montrer que si p et q sont deux réels tels que $0 < p < q$ alors

$$\ell_p(\mathbb{N}) \subset \ell_q(\mathbb{N}) \text{ et } (S_q(X))^{1/q} \leq (S_p(X))^{1/p}$$

pour toute suite $X \in \ell_p(\mathbb{N})$.

b) Pour toutes suites X et Y dans $\ell_2(\mathbb{N})$, exprimer $\|X+Y\|_2^2$ en fonction de $\|X\|_2$, $\|Y\|_2$ et $\langle X, Y\rangle$. En déduire que $\|\ \|_2$ definit une norme sur l'espace vectoriel $\ell_2(\mathbb{N})$.

c) Soit $\{X_n,\ n \geq 0\}$ une suite d'éléments de $\ell_2(\mathbb{N})$ telle que

$$(2) \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall m \geq N,\ \|X_n - X_m\|_2 \leq \varepsilon.$$

Montrer alors qu'il existe une suite réelle X dans $\ell_2(\mathbb{N})$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_2 = 0.$$

II. Dans la suite de l'exercice on suppose que $0 < p \leq 2$. Pour $s > 0$ et $R > 0$. on définit l'ensemble $\mathcal{E}_{s,p}(R)$ par

$$\mathcal{E}_{s,p}(R) = \{X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : \sum_{k\geq 0}(k+1)^{ps}|x_k|^p \leq R^p\}.$$

On se fixe un entier $D \geq 1$. On définit alors

$$\mathcal{M}_D = \{M \subset \mathbb{N} : \text{ Card}(M) = D\},$$

et pour $M \in \mathcal{M}_D$, on notera V_M l'espace vectoriel

$$V_M = \{X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : \forall k \notin M,\ x_k = 0\}.$$

Pour $M \in \mathcal{M}_D$ et $X \in \ell_2(\mathbb{N})$, on posera

$$\mathrm{d}(X, V_M) = \inf\{\|X - Y\|_2,\ Y \in V_M\}.$$

a) Montrer que si $M = \{0, ..., D-1\}$ alors

$$\sup_{X\in\mathcal{E}_{s,p}(R)} \mathrm{d}(X, V_M) = R(D+1)^{-s}.$$

On pourra utiliser le $I.a$).

b) Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_D$,

$$\sup_{X\in\mathcal{E}_{s,p}(R)} \mathrm{d}(X, V_M) \geq R(D+1)^{-s}.$$

c) On suppose dans cette question que $0 < p < 2$ et que D est pair. On pose alors $D = 2d$. Pour toute suite $X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\ell_2(\mathbb{N})$, on associe un ensemble $M_d(X) = \{k_1, ..., k_d\}$ tel que $\forall i = 1, ..., d,\ k_i \geq d,\ k_i \neq k_j$ pour $i \neq j$, et

$$\begin{aligned}
|x_{k_1}| &= \sup\{|x_k| :\ k \geq d\} \\
|x_{k_2}| &= \sup\{|x_k| :\ k \geq d,\ k \neq k_1\} \\
&\vdots \quad\quad \vdots \\
|x_{k_d}| &= \sup\{|x_k| :\ k \geq d,\ k \neq k_1, ..., k_{d-1}\}.
\end{aligned}$$

Montrer que $\forall k' \geq d$ et $k \notin M_d(X)$

$$|x_{k'}|^{2-p} \leq \left(\frac{1}{d}\sum_{k\in M_d(X)}|x_k|^p\right)^{\frac{2}{p}-1}.$$

En déduire que si $X \in \mathcal{E}_{s,p}(R)$ alors il existe $M \in \mathcal{M}_D$ tel que

$$\mathrm{d}(X, V_M) \leq \kappa R D^{-s-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}},$$

où κ est une constante ne dépendant que de p et s.

Exercice 2

Rappels et notations

On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\},$$

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\},$$

et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On pose

$$\Sigma = \left\{a^2 + b^2 \ , \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

et

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

On munit $\mathbb{Z}[i]$ de l'addition et de la multiplication usuelles des nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$, on posera $N(z) = z\bar{z}$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$ la relation $a \equiv b \pmod{c}$ signifie que c divise $a - b$. Pour $u \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ et $v \in \mathbb{Z}[i]$, on dira que u divise v s'il existe $w \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $uw = v$. On rappelle qu'un nombre premier p de $\mathbb{N}$ est un nombre n'admettant pour diviseur que 1 et lui-même et vérifiant $p \geq 2$.

1) Montrer que

$$n \in \Sigma \iff \exists z \in \mathbb{Z}[i], \ n = N(z).$$

Montrer que si $n, n' \in \Sigma$ alors $nn' \in \Sigma$.

Dans la suite de l'exercice p désigne un nombre premier de $\mathbb{N}$.

2) Montrer que

$$p \in \Sigma \Longrightarrow \ p = 2 \text{ ou } \ p \equiv 1 \pmod{4}.$$

3) Montrer que

$$p \in \Sigma \iff \exists z, z' \in \mathbb{Z}[i] - \{\pm 1, \pm i\}, \ p = zz'.$$

Montrer que s'il existe $z, z' \in \mathbb{Z}[i] - \{\pm 1, \pm i\}$ tels que $p = zz'$ alors $z' = \bar{z}$.

4) Montrer que $\forall (z,t) \in \mathbb{Z}[i] \times (\mathbb{Z}[i] - \{0\}).\ \exists (q,r) \in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]$ tel que

$$z = tq + r \text{ avec } \mathcal{N}(r) < \mathcal{N}(t).$$

On pourra utiliser la division dans $\mathbb{C}$.

5) Soit $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ avec $u \neq 0$ ou $v \neq 0$. On note

$$I(u,v) = \{uz + vz',\ (z.z') \in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]\},$$

et $d \in I(u,v) - \{0\}$ tel que

$$\mathcal{N}(d) = \inf \{\mathcal{N}(z) :\ z \in I(u.v) - \{0\}\}.$$

Montrer que

$$I(u,v) = \{dz,\ z \in \mathbb{Z}[i]\}.$$

On pose $d = \text{pgcd}(u,v)$.

6) Soit $u, v, w \in \mathbb{Z}[i]$ avec $u \neq 0$. Montrer que si u divise vw et $\text{pgcd}(u,v) \in \{\pm 1, \pm i\}$ alors u divise w.

7) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, p ne divise pas $a + i$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

8) En utilisant les questions 3, 6 et 7, montrer que s'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ alors $p \in \Sigma$.

9) Montrer la reciproque.

Exercice 3

Exercice conseillé aux candidats de la discipline secondaire.

Rappels et notations

On note $\mathcal{C}_b^0$ l'ensemble des applications g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| < +\infty.$$

Pour $k \geq 1$, $\mathcal{C}_b^k$ est l'ensemble des applications g telles que g, g',..., $g^{(k)}$ existent et appartiennent à $\mathcal{C}_b^0$. Pour toute application g continue telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|e^{-x^2/2}dx = \lim_{C\to+\infty} \int_{-C}^{+C} |g(x)|e^{-x^2/2}dx < +\infty,$$

on notera

$$\int g(x)d\gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx/\sqrt{2\pi} = 1$. On dira qu'une application g est à support compact, si

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \notin [a,b]\ g(x) = 0.$$

Dans la suite, pour $g \in \mathcal{C}_b^2$ on posera

$$L[g](x) = g''(x) - xg'(x).$$

1) Montrer que $\forall h \in \mathcal{C}_b^1$ et $g \in \mathcal{C}_b^2$

$$\int h(x)L[g](x)d\gamma(x) = -\int h'(x)g'(x)d\gamma(x).$$

Pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ et g continue à support compact, on pose

$$P_t[g](x) = \int g\left(e^{-t}x + (1-e^{-2t})^{1/2}y\right)d\gamma(y).$$

Dans la suite f désignera une application de $\mathcal{C}_b^2$ à support compact.

2) Montrer que pour tout $t \geq 0$ fixé, l'application $x \to P_t[f](x)$ appartient à $\mathcal{C}_b^2$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{dP_t[f]}{dx}(x) = e^{-t}P_t[f'](x).$$

3) Montrer que $\forall C > 0$.

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in [-C,C]} \left| P_t[f](x) - \int f(y) d\gamma(y) \right| = 0.$$

4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\frac{dP_t[f](x)}{dt}(t) = L\left[P_t[f]\right](x) \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Soit f une application à support compact vérifiant $\int f(x) d\gamma(x) = 0$. Pour $t \geq 0$, on pose

$$G(t) = \int \exp\left(P_t[f](x)\right) d\gamma(x).$$

On admettra que $G \in \mathcal{C}_b^1$ et que $\forall t > 0$

$$G'(t) = \int \frac{dP_t[f](x)}{dt}(t) \exp\left(P_t[f](x)\right) d\gamma(x).$$

5) Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} G(t) = 1.$$

(Utiliser la question 3)

6) Montrer $\forall t > 0$

$$-G'(t) \leq \|f'\|_\infty^2 e^{-2t} G(t),$$

en déduire que

$$\int \exp\left(f(x)\right) d\gamma(x) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\|f'\|_\infty^2\right).$$

Lexique

On donne les traductions en *anglais/allemand/italien/espagnol* des mots suivants.

- admettre: to admit / als bekannt voraussetzen / ammettere / admitir
- ensemble: set / Menge / insieme / conjunto
- il existe: there exists / es gibt / esiste / existe
- montrer: to prove / beweisen / dimostrare / demostrar
- noter: to denote / bezeichnen / notare /notar
- rappeler: to recall / erinnern an / richiamare / recordar
- supposer: to assume / annehmen / assumere /suponer
- suite: a sequence / Folge / successione / sucesión
- pair: even / gerade / pari / par
- nombre premier: prime number / Primzahl / numero primo / número primo
- diviser: to divide / dividieren / dividere / dividir
- application: map / Abbildung / applicazione / aplicacion
- continu(e): continuous / stetig / continua / continua